Lógica y Computabilidad
Verano de 2023
Segundo Parcial

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

▷ Resolver cada ejercicio en **una hoja separada**. ▷ Poner nombre y LU en todas las hojas. ▷ Sólo puede usarse una hoja de apuntes personales. ▷ Se debe justificar **todas** las respuestas. ▷ El parcial se aprueba con al menos 2 ejercicios completamente bien resueltos.	Nombre y Apellido:	Nota:			
	Libreta Universitaria:	Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4

Ejercicio 1. **a**) Sea $\top$ un conectivo de aridad 0 tal que $v \models \top$ para toda valuación v y $\leftrightarrow$ un conectivo de aridad 2 tal que $v \models \alpha \leftrightarrow \beta$ sii o bien $v \models \alpha$ y $v \models \beta$, o bien $v \not\models \alpha$ y $v \not\models \beta$. Demostrar que $\{\top, \leftrightarrow\}$ no es un conjunto de conectivos adecuado.

b) Dados Γ_1, Γ_2 dos conjuntos de fórmulas cualesquiera de la lógica proposicional, decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

i) Si $\mathbf{Con}(\Gamma_1) = \mathbf{Con}(\Gamma_2)$, entonces $\mathbf{Con}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = \mathbf{Con}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

ii) Si $\mathbf{Con}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = \mathbf{Con}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, entonces $\mathbf{Con}(\Gamma_1) = \mathbf{Con}(\Gamma_2)$.

Ejercicio 2. Se tiene el lenguaje $\mathcal{L} = \{f, g, P\}$ con igualdad, donde los símbolos de función f y g son binarios, y también es binario el símbolo de predicado P. Dado el modelo $\mathcal{M}$ con dominio $\mathbb{N}_0$, que define a f como la división entera y a g como el resto de una división, mientras que P se define como la relación $\leq$ habitual, se pide distinguir a cada uno de los elementos del dominio que son números primos.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}; <_z \rangle$ el modelo usual de los enteros con la relación “es menor a”. Considerar un lenguaje de primer orden con igualdad $\mathcal{L}$ con un símbolo de predicado $<$. Sea la siguiente axiomatización $SQ_{\mathcal{Z}}$ que extiende a SQ con los siguientes axiomas:

S1$(\forall x)\neg(x < x)$
S2$(\forall x)(\forall y)(x < y \to \neg(y < x))$
S3$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x < y \wedge y < z) \to x < z)$
S4$(\forall x)(\forall y)(\neg(x = y) \to (x < y \vee y < x))$
S5$(\forall x)(\exists y)x < y$

a) Demostrar que los axiomas **S1** y **S4** son válidos en $\mathcal{Z}$.

b) Dar una fórmula φ y un modelo $\mathcal{M}$ tal que:

i) todos los axiomas de $SQ_{\mathcal{Z}}$ sean válidos en $\mathcal{M}$;

ii) $\mathcal{M} \not\models \varphi$;

iii) $\mathcal{Z} \models \varphi$.

c) Asumiendo que $SQ_{\mathcal{Z}}$ es correcto para $\mathcal{Z}$, demostrar que $SQ_{\mathcal{Z}}$ no es completa respecto a $\mathcal{Z}$.

Ejercicio 4. Dado el mismo lenguaje de PO $\mathcal{L}$ y el modelo $\mathcal{Z}$ definidos anteriormente:

a) Demostrar que para todo $i \in \mathbb{N}$, existe una fórmula $\varphi_i(x, y)$ con dos variables libres x e y tal que para toda valuación $v, \mathcal{Z} \models \varphi_i(x, y)[v]$ si y sólo si hay exactamente i elementos que son menores que y y no menores que x.

b) Demostrar que no es expresable en primer orden la proposición ”Para todo par de enteros x e y, si x es menor que y entonces hay una cantidad finita de enteros que son menores que y y no menores que x”.